

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 IULIE 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ

VARIANTA 2

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

30 de puncte

1.	a) $1+1=2; 1+4=5; 1+6=7; 4+4=8; 4+6=10; 6+6=12$, iar $\{1,4,6\} \cap \{2,5,7,8,10,12\} = \emptyset$ $3+3=6 \in \{1,3,6\}$	3p 2p
	b) $X = \{1006, 1007, \dots, 2010\}$. Dacă $x, y \in X$, atunci $x + y \geq 2012 \notin X$ X are 1005 elemente	3p 1p
	c) Fie $X \subset B$, $X \neq \emptyset$ care nu are proprietatea $(p) \Rightarrow \exists x, y \in X$ cu $x + y \in X \Rightarrow 8 \leq x + y \leq 8 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow x = y = 4$, deci $\{4, 8\} \subset X$ Cum orice $X \subset B$ cu $\{4, 8\} \subset X$ nu are proprietatea $(p) \Rightarrow$ numărul submulțimilor care nu au proprietatea (p) este $2^3 = 8$ Cum B are 31 de submulțimi nevide, rezultă că numărul cerut este 23	1p 1p 1p
	d) Dacă $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ cu $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ are proprietatea (p) , notăm cu $X = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1\}$. Cum $1 \leq a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_k - a_1 \leq 2010$, rezultă că $X \subset \{1, 2, \dots, 2010\}$ și are $k - 1$ elemente. Dacă $a_i - a_1 = a_j \in A$ pentru un $i \in \{2, \dots, k\}$ și un $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, atunci $a_i = a_1 + a_j \in A$, fals, deci $X \cap A = \emptyset$. Cum $X \cup A \subset \{1, 2, \dots, 2010\}$, rezultă $k \leq 1005$	3p
	2.	a) $S_{ABC} = \frac{AB \cdot d(C, AB)}{2} = \frac{AC \cdot d(B, AC)}{2}$ Finalizare
	b) C_{100}^3	4p
	c) Fie d dreapta care taie cercurile C_1, C_2, C_3 . Alegem un reper cartezian cu axa $Ox = d$ în care $O_1(x_1, y_1), O_2(x_2, y_2), O_3(x_3, y_3)$. Cum distanța de la O_i la $d, i \in \{1, 2, 3\}$, este cel mult 1, rezultă că $ y_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$. Obținem $ \Delta \leq 2O_1O_3$ $h_{O_2} = \frac{2S}{O_1O_3} = \frac{ \Delta }{O_1O_3} \leq 2$	1p 2p 1p
	d) Alegem cea mai mare distanță $O_iO_j, i, j \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Fie ea O_1O_2 . Pentru fiecare $i \in \{3, 100\}$ avem $O_1O_i \leq O_1O_2, O_2O_i \leq O_1O_2$ rezultă că înălțimea din O_i este cea mai mică înălțime a triunghiului $O_1O_2O_i$. Cum acest triunghi are o înălțime mai mică sau egală cu 2 rezultă că distanța de la O_i la O_1O_2 este cel mult 2. Deci O_1O_2 intersectează $D_i, i \geq 3$. Cum O_1O_2 intersectează D_1 și D_2 rezultă concluzia	2p

SUBIECTUL al II-lea

30 de puncte

1.	<p>a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</p>	2p
	Finalizare	2p
	<p>b) $A = I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$</p> <p>$B^k = O_3, \forall k \geq 3$</p> <p>$A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + \dots + C_n^n B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</p>	1p 1p 2p
2.	<p>a) $(x \perp y) \perp z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$ și $x \perp (y \perp z) = x \perp (y^{\ln z}) = x^{\ln y^{\ln z}} = x^{\ln y \cdot \ln z}$, deci legea „$\perp$” este asociativă</p> <p>a este element neutru $\Leftrightarrow x \perp a = a \perp x = x, \forall x \in G \Leftrightarrow x^{\ln a} = a^{\ln x} = x, \forall x \in G \Leftrightarrow a = e \in G$</p> <p>$x \perp x' = e \Rightarrow x^{\ln x'} = e \Rightarrow \ln x \cdot \ln x' = 1 \Rightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G$, deci orice element din G este simetrizabil</p> <p>$x \perp y = y \perp x \Leftrightarrow x^{\ln y} = y^{\ln x} \Leftrightarrow \ln y \cdot \ln x = \ln x \cdot \ln y$, adevărat, deci legea este comutativă</p>	1p 1p 1p 1p
	<p>b) Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow G, f(x) = e^x$ este bijectivă</p> <p>$f(xy) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^*$</p>	2p 1p
	<p>3. a) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1}, x \in [0, +\infty)$</p> <p>Cum $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$ și $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, rezultă f strict crescătoare pe $[0, +\infty)$</p> <p>f are un unic punct de extrem, $x = 0$ (punct de minim)</p>	2p 2p 1p
	<p>b) f continuă pe $[0, +\infty)$, deci graficul lui f nu are asimptote verticale</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, deci graficul lui f nu are asimptote orizontale</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, deci graficul lui f nu are asimptote oblice</p>	2p 1p 1p
	<p>c) Din a) rezultă că $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$, deci $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x), \forall x > 0$</p> <p>Dacă $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(1+x) - x$, atunci $g'(x) \leq 0$ și $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, deci g este strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$</p> <p>Rezultă că $g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0$, adică $\ln(1+x) < x, \forall x > 0$</p>	1p 2p 1p
<p>d) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, însumăm inegalitățile de la c) pentru $x = \frac{k}{n^2}, k = \overline{1, n}$ și obținem</p> <p>$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$, deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)} = \sqrt{e}$</p>	1p 1p	

SUBIECTUL al III-lea

30 de puncte

- definiția celor două categorii de metode 6p.
- clasificarea celor două categorii de metode 6p.
- descrierea celor două categorii de metode 6p.
- prezentarea comparativă a avantajelor celor două categorii de metode, cu exemple adecvate disciplinei de concurs 6p.
- prezentarea comparativă a dezavantajelor celor două categorii de metode, cu exemple adecvate disciplinei de concurs 6p.

Notă:

1. În situația în care candidatul prezintă avantajele, respectiv dezavantajele celor două categorii de metode fără a da exemple adecvate disciplinei de concurs se acordă câte 4 puncte din cele 6 puncte posibile.
2. Se punctează oricare modalitate corectă de răspuns: fie comparația între cele două categorii de metode, fie comparația între oricare două metode, câte una din fiecare categorie.