

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 IULIE 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ

VARIANTA 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

30 de puncte

1. Spunem că o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{N}$ are proprietatea (p) dacă suma oricăror două elemente ale lui A , nu neapărat distincte, nu este în A .

5p a) Arătați că mulțimea $\{1, 4, 6\}$ are proprietatea (p) , iar mulțimea $\{1, 3, 6\}$ nu are proprietatea (p) .

4p b) Dați un exemplu de mulțime inclusă în mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ care are 1005 elemente și care are proprietatea (p) .

3p c) Câte submulțimi nevide ale mulțimii $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ au proprietatea (p) ?

3p d) Arătați că dacă $A \subset \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ are proprietatea (p) , atunci mulțimea A are cel mult 1005 elemente.

2. În planul α se consideră punctele O_1, O_2, \dots, O_{100} , oricare trei necoliniare și mulțimea $M = \{O_1, O_2, \dots, O_{100}\}$. Se notează cu C_i cercul de centru O_i și rază 1, $C_i \subset \alpha$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Se știe că pentru orice $i, j, k \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, există o dreaptă care intersectează cercurile C_i , C_j și C_k .

5p a) Arătați că într-un triunghi ABC cu $AB \leq AC$, distanța de la B la AC este mai mică sau egală decât distanța de la C la AB .

4p b) Determinați numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea M .

4p c) Arătați că triunghiul $O_1O_2O_3$ are o înălțime de lungime cel mult 2.

2p d) Pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ se notează cu D_i cercul de centru O_i și rază 2, $D_i \subset \alpha$. Arătați că există o dreaptă care intersectează toate cercurile D_1, D_2, \dots, D_{100} .

SUBIECTUL al II-lea

30 de puncte

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4p a) Arătați că $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.

4p b) Calculați A^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziție $x \perp y = x^{\ln y}$.

4p a) Arătați că mulțimea G împreună cu legea „ \perp ” este grup comutativ.

3p b) Arătați că grupul (G, \perp) este izomorf cu grupul (\mathbb{R}^*, \cdot) .

3. Se consideră funcția $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.

5p a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .

4p b) Arătați că graficul funcției f nu are asimptote.

4p c) Demonstrați că $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$.

2p d) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

30 de puncte

Realizați o comparație între metodele didactice expositive (explicația, expunerea, descrierea) și metodele de învățare prin cooperare (brainstorming-ul, tema/ proiectul în grup, mozaicul). În realizarea comparației veți prezenta: definiția celor două categorii de metode, clasificarea și descrierea lor, avantajele și dezavantajele acestora, cu exemple adecvate disciplinei de concurs.